Grundlagen der Elektrotechnik

Knotenpotentialverfahren mit Spannungsquelle

TH-Köln 2020

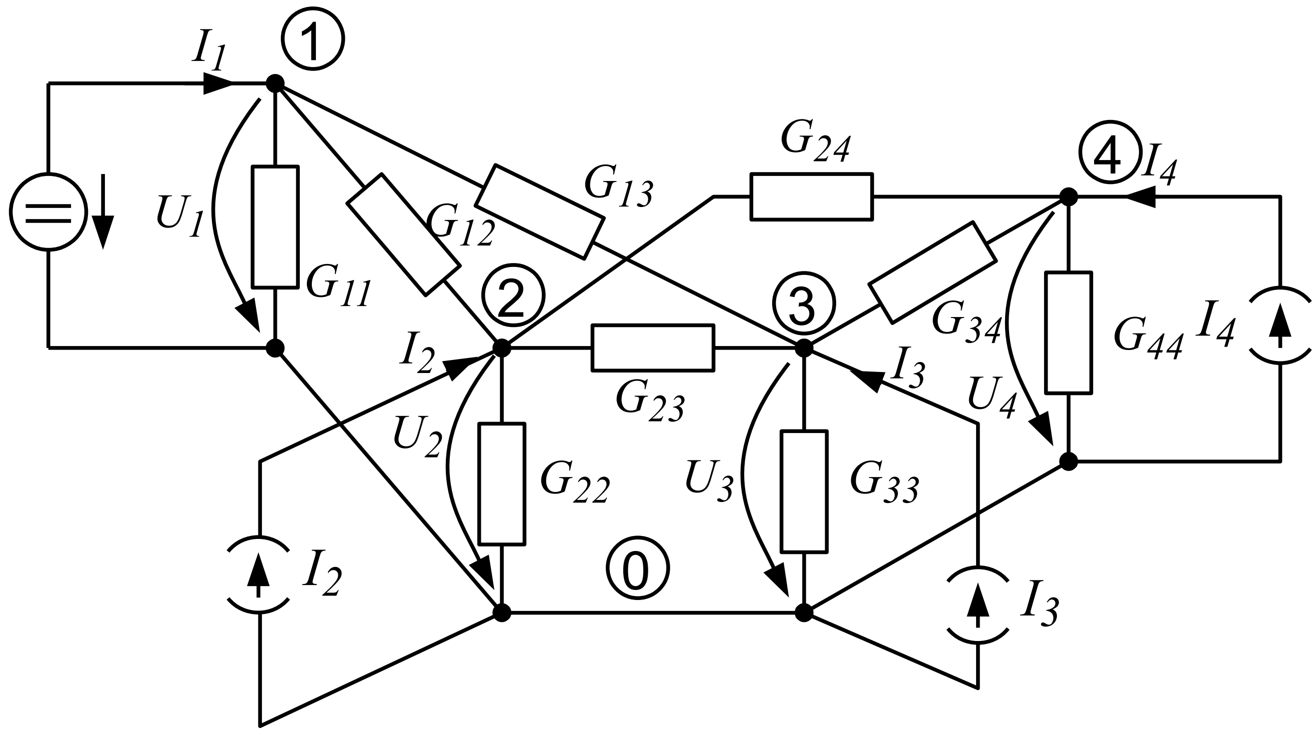
Prof. Dr. Eberhard Waffenschmidt

Knotenpotentialverfahren mit Spannungsquelle

- Quellenumwandlung
- Teilinversion des Gleichungssystem

Knotenpotentialverfahren

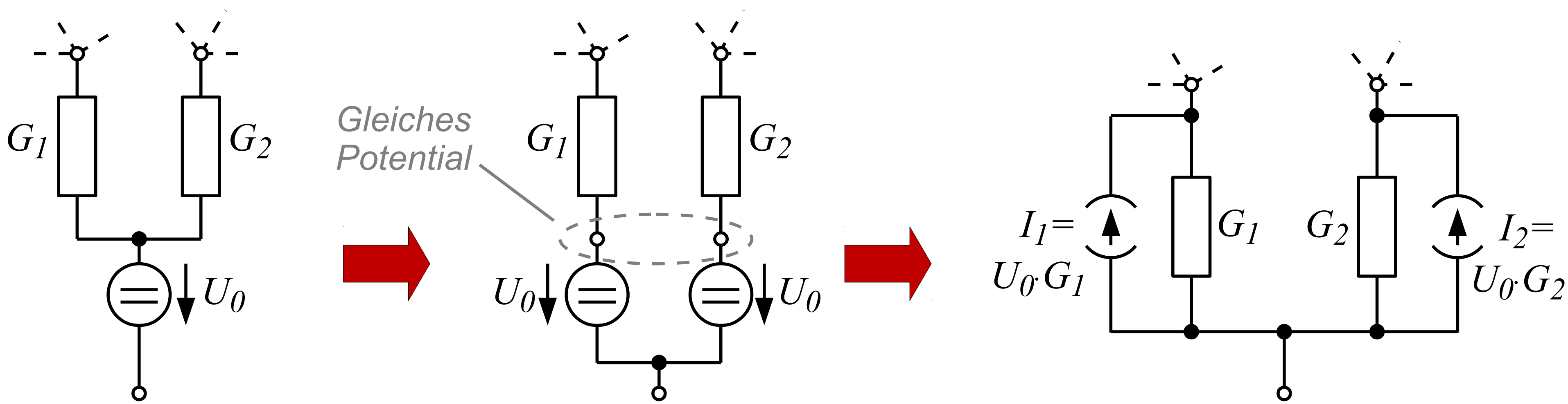
Problem:
Spannungsquelle anstatt Stromquelle



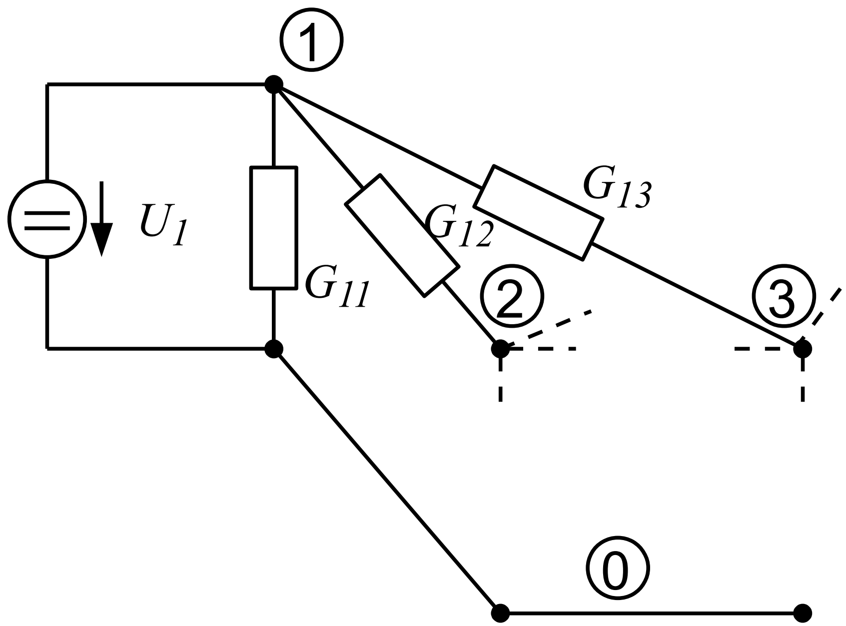
Technology
Arts Sciences
TH Köln

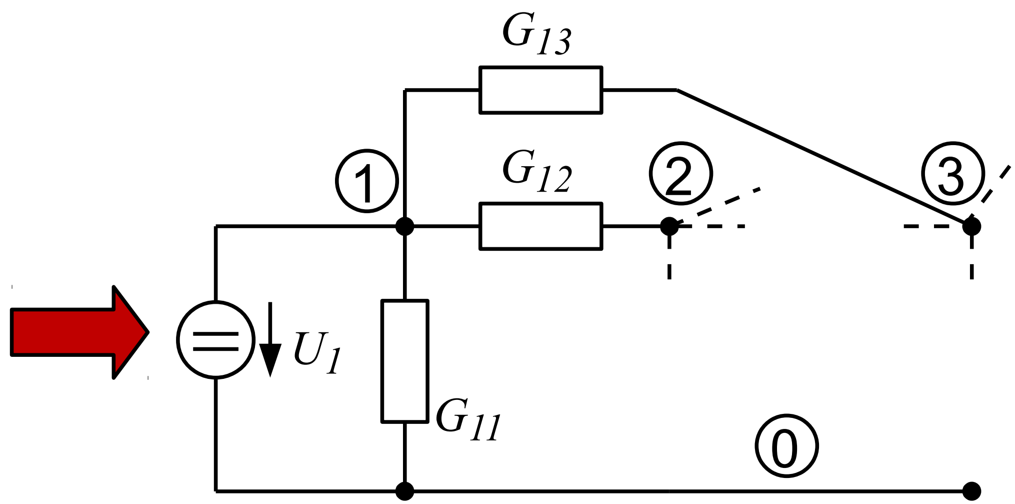
Knotenpotential mit Spannungsquellen

Lösung 1: Quellen teilen und umwandeln

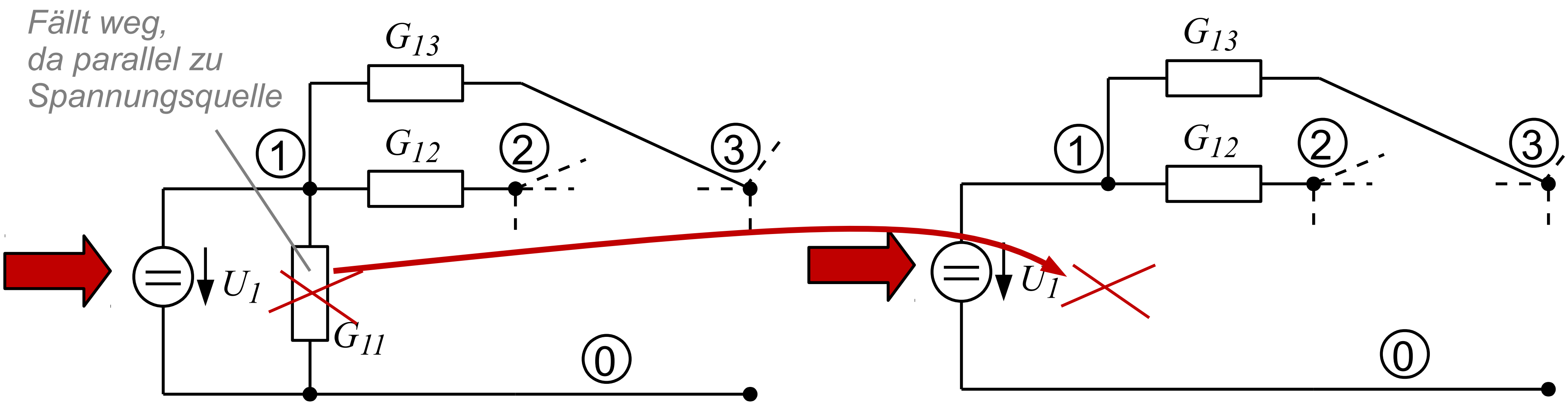


Spannungsquelle an einem Knoten



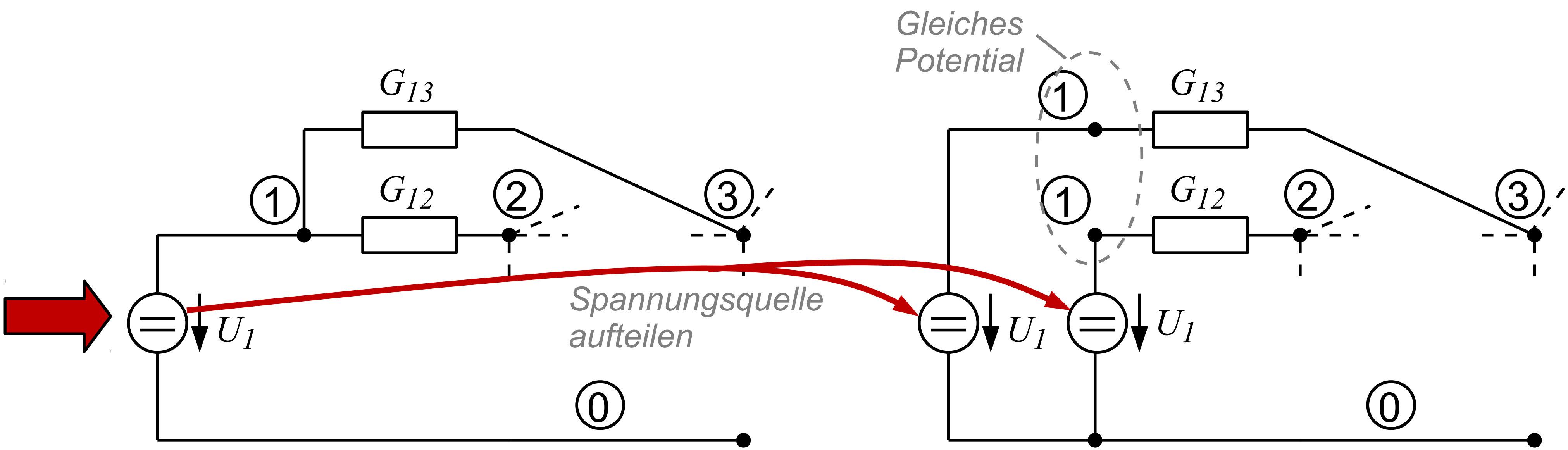


Spannungsquelle an einem Knoten



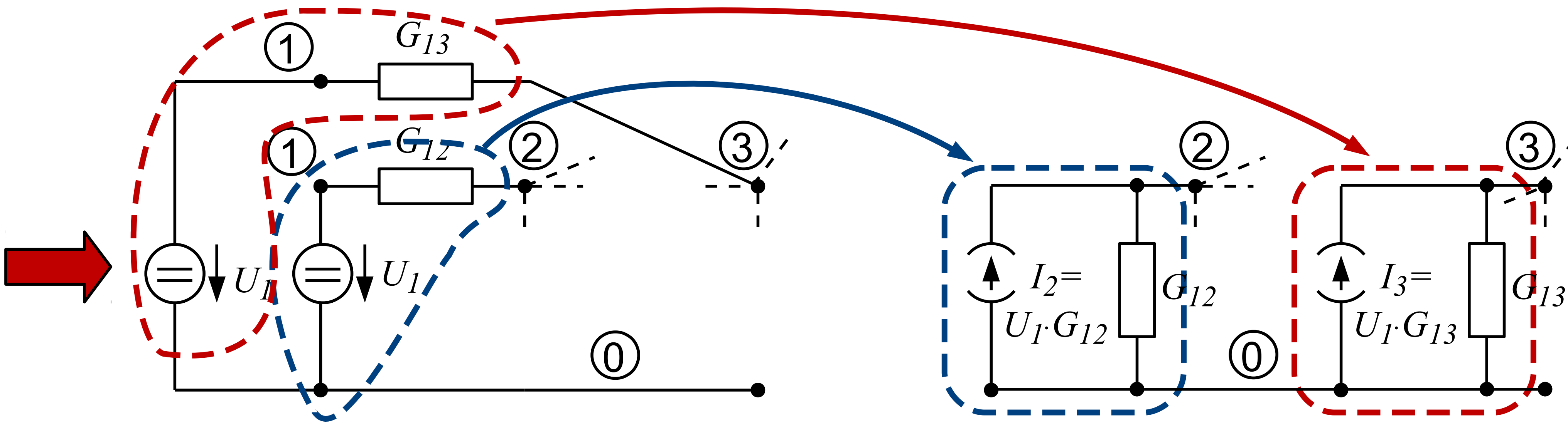
Spannungsquelle an einem Knoten

Spannungsquellen aufteilen



Spannungsquelle an einem Knoten

In äquivalente Stromquellen umwandeln



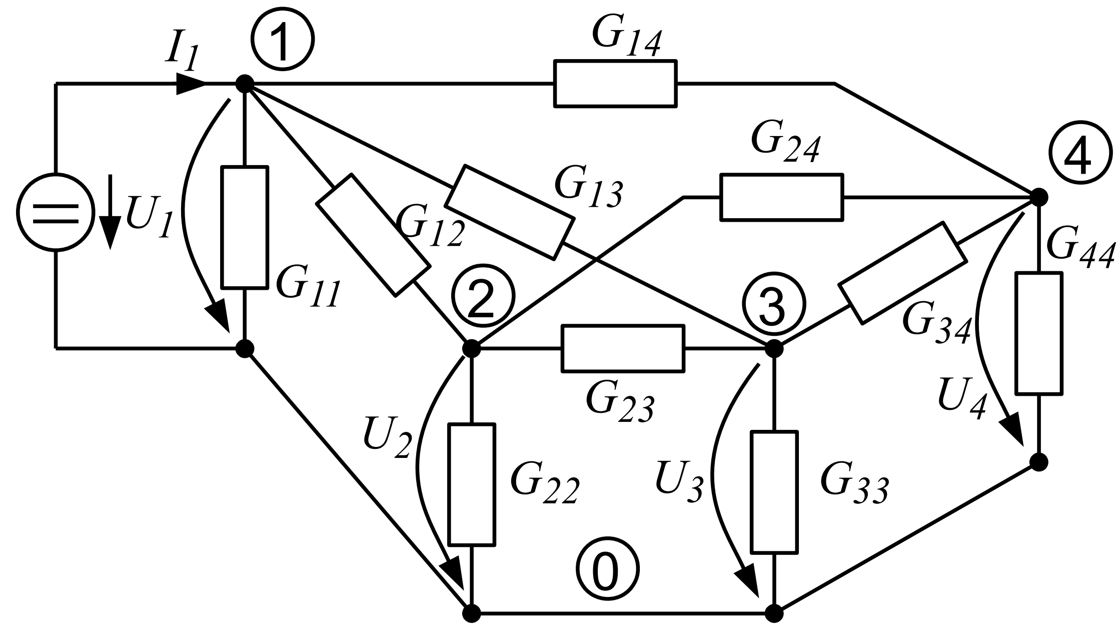
Kochrezept:

- Spannungsknoten mit Spannungsquelle fällt weg
- Alle Knoten, die mit dem Spannungsknoten direkt verbunden sind, erhalten
  - eine zusätzliche Stromquelle und
  - einen zusätzlichen Leitwert zum Referenzknoten

Knotenpotential mit Spannungsquellen

Lösung 2: Teilinversion des Gleichungssystems ohne Ströme

- *Gegeben:*
  - Eine feste Spannung (z.B. Anschluss starres Netz)
  - Lasten werden als Impedanzen beschrieben
  - Daher keine Knoten-Ströme I_k von „außen“, außer am Einspeiseknoten
- *Gesucht:*
  - Einspeisestrom
  - Knotenspannungen
- *Lösung:*
  - Teilinversion von $A \rightarrow H$, Ströme $I = 0$ für $i \geq 2$



$$\begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{H} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Technology Arts Sciences TH Köln

Teilinversion ohne Knotenströme

Beispiel für 4 Knoten

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}}_{\vec{U}} = \underbrace{\begin{array}{cccc} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} b_{11} & \cancel{b_{12}} & \cancel{b_{13}} & \cancel{b_{14}} \\ b_{21} & \cancel{b_{22}} & \cancel{b_{23}} & \cancel{b_{24}} \\ b_{31} & \cancel{b_{32}} & \cancel{b_{33}} & \cancel{b_{34}} \\ b_{41} & \cancel{b_{42}} & \cancel{b_{43}} & \cancel{b_{44}} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{I}}$$

$$I_1 = \frac{1}{b_{11}} \cdot U_1$$

$$U_2 = b_{21} \cdot I_1$$
$$U_3 = b_{31} \cdot I_1$$
$$U_4 = b_{41} \cdot I_1$$

$$I_1 = \frac{1}{b_{11}} \cdot U_1$$
$$U_2 = \frac{b_{21}}{b_{11}} \cdot U_1$$
$$U_3 = \frac{b_{31}}{b_{11}} \cdot U_1$$
$$U_4 = \frac{b_{41}}{b_{11}} \cdot U_1$$

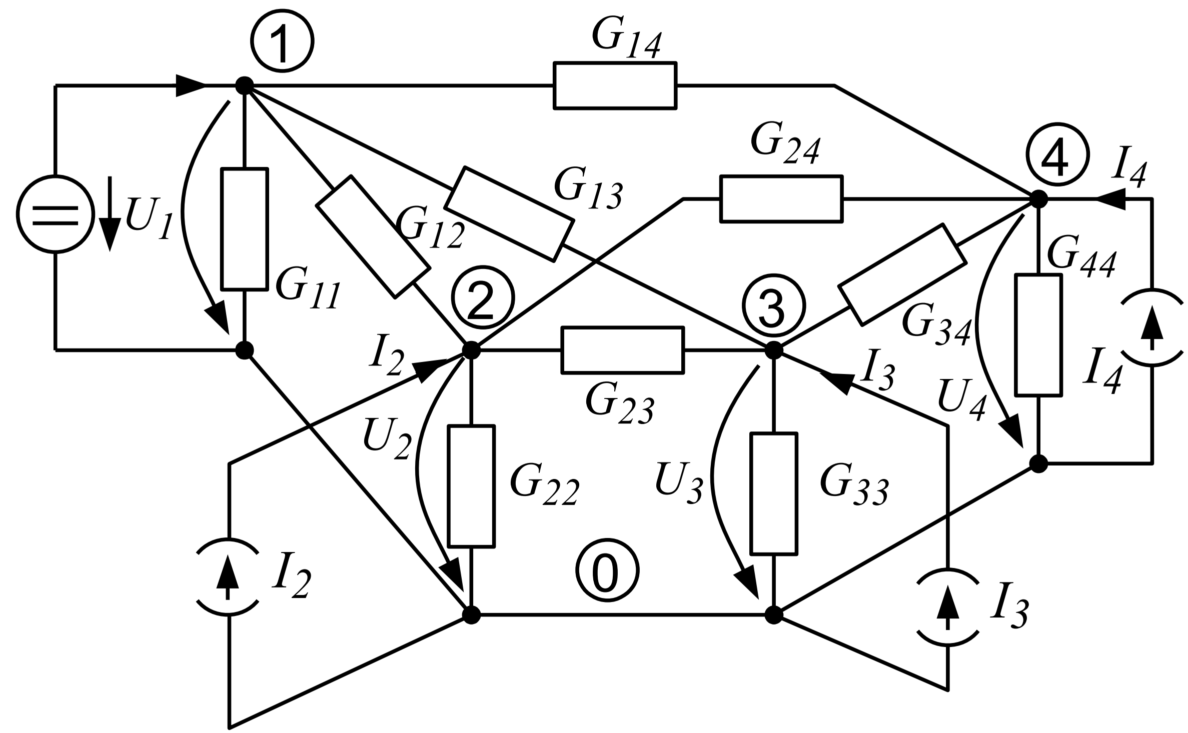
$$\begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21}/b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31}/b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{41}/b_{11} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{H}} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Knotenpotential mit Spannungsquellen

Lösung 3: Teilinversion des Gleichungssystems

- *Gegeben:*
  - Eine feste Spannung (z.B. Anschluss starres Netz)
  - Ströme der anderen Knoten (als Lasten)
- *Gesucht:*
  - Einspeisestrom
  - Knotenspannungen
- *Lösung:*

  Teilinversion von A → H



$$\begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{H} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}$$

Teilinversion

Beispiel für 3 Knoten

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}}_{\vec{U}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}}_{\vec{I}}$$

$$\Rightarrow$$

$$I_1 = \frac{1}{b_{11}} \cdot U_1 - \frac{b_{12}}{b_{11}} \cdot I_2 - \frac{b_{13}}{b_{11}} \cdot I_3$$

$$U_2 = b_{21} \cdot \left(\frac{1}{b_{11}} \cdot U_1 - \frac{b_{12}}{b_{11}} \cdot I_2 - \frac{b_{13}}{b_{11}} \cdot I_3\right) + b_{22} \cdot I_2 + b_{23} \cdot I_3$$

$$U_3 = \cdots$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{b_{11}} & \dfrac{-b_{12}}{b_{11}} & \dfrac{-b_{13}}{b_{11}} \\ \dfrac{b_{21}}{b_{11}} & b_{22} - b_{21} \cdot \dfrac{b_{12}}{b_{11}} & b_{23} - b_{21} \cdot \dfrac{b_{13}}{b_{11}} \\ \dfrac{b_{31}}{b_{11}} & b_{32} - b_{31} \cdot \dfrac{b_{12}}{b_{11}} & b_{33} - b_{31} \cdot \dfrac{b_{13}}{b_{11}} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{H}} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

Kontakt

Prof. Dr. Eberhard Waffenschmidt
Professur Elektrische Netze
Institut für Elektrische Energietechnik,
Fakultät für Informations-, Medien- und Elektrotechnik (F07)
Technische Hochschule Köln
Betzdorferstraße 2, Raum ZO 9-19
50679 Köln, Deutschland
Tel. +49 221 8275 2020
eberhard.waffenschmidt@th-koeln.de
https://www.th-koeln.de/personen/eberhard.waffenschmidt/

Anhang:
Teil-Inversion einer Matrix

Teil-Inversion exemplarisch

Gegeben:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix}$$

Gesucht:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \boldsymbol{D} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix}$$

Teil-Inversion exemplarisch

Als Gleichungssystem geschrieben:

$$I_1 = a_{11} \cdot U_1 + a_{12} \cdot U_2 + a_{13} \cdot U_3 + a_{14} \cdot U_4 + a_{15} \cdot U_5$$
$$I_2 = a_{21} \cdot U_1 + a_{22} \cdot U_2 + a_{23} \cdot U_3 + a_{24} \cdot U_4 + a_{25} \cdot U_5$$
$$I_3 = a_{31} \cdot U_1 + a_{32} \cdot U_2 + a_{33} \cdot U_3 + a_{34} \cdot U_4 + a_{35} \cdot U_5$$
$$I_4 = a_{41} \cdot U_1 + a_{42} \cdot U_2 + a_{43} \cdot U_3 + a_{44} \cdot U_4 + a_{45} \cdot U_5$$
$$I_5 = a_{51} \cdot U_1 + a_{52} \cdot U_2 + a_{53} \cdot U_3 + a_{54} \cdot U_4 + a_{55} \cdot U_5$$

Sortieren nach Unbekannten (links) und Bekannten (rechts):

$$I_1 - a_{13} \cdot U_3 - a_{14} \cdot U_4 - a_{15} \cdot U_5 = a_{11} \cdot U_1 + a_{12} \cdot U_2$$
$$I_2 - a_{23} \cdot U_3 - a_{24} \cdot U_4 - a_{25} \cdot U_5 = a_{21} \cdot U_1 + a_{22} \cdot U_2$$
$$-a_{33} \cdot U_3 - a_{34} \cdot U_4 - a_{35} \cdot U_5 = a_{31} \cdot U_1 + a_{32} \cdot U_2 - I_3$$
$$-a_{43} \cdot U_3 - a_{44} \cdot U_4 - a_{45} \cdot U_5 = a_{41} \cdot U_1 + a_{42} \cdot U_2 - I_4$$
$$-a_{53} \cdot U_3 - a_{54} \cdot U_4 - a_{55} \cdot U_5 = a_{51} \cdot U_1 + a_{52} \cdot U_2 - I_5$$

Teil-Inversion exemplarisch

Sortiertes Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
I_1 \quad -a_{13}\cdot U_3 - a_{14}\cdot U_4 - a_{15}\cdot U_5 &= a_{11}\cdot U_1 + a_{12}\cdot U_2 \\
I_2 - a_{23}\cdot U_3 - a_{24}\cdot U_4 - a_{25}\cdot U_5 &= a_{21}\cdot U_1 + a_{22}\cdot U_2 \\
-a_{33}\cdot U_3 - a_{34}\cdot U_4 - a_{35}\cdot U_5 &= a_{31}\cdot U_1 + a_{32}\cdot U_2 - I_3 \\
-a_{43}\cdot U_3 - a_{44}\cdot U_4 - a_{45}\cdot U_5 &= a_{41}\cdot U_1 + a_{42}\cdot U_2 \quad - I_4 \\
-a_{53}\cdot U_3 - a_{54}\cdot U_4 - a_{55}\cdot U_5 &= a_{51}\cdot U_1 + a_{52}\cdot U_2 \qquad - I_5
\end{aligned}
$$

In Matrix-Schreibweise:

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_{13} & -a_{14} & -a_{15} \\ 0 & 1 & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ 0 & 0 & -a_{33} & -a_{34} & -a_{35} \\ 0 & 0 & -a_{43} & -a_{44} & -a_{45} \\ 0 & 0 & -a_{53} & -a_{54} & -a_{55} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix}}_{\vec{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & -1 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & -1 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{C}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix}}_{\vec{x}}
$$

$$\boldsymbol{B} \cdot \vec{y} = \boldsymbol{C} \cdot \vec{x}$$

$$\vec{y} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot (\boldsymbol{C} \cdot \vec{x})$$

$$\vec{y} = (\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{C}) \cdot \vec{x}$$

$\vec{y} = \boldsymbol{D} \cdot \vec{x}$ mit $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{C}$

Teil-Inversion: Verallgemeinerung

Ausgangspunkt:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_m \\ I_{m+1} \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \\ U_{m+1} \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$$

mit

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,m} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} \\ \hline a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right)$$

n = Anzahl der Knoten

m = Anzahl der bekannten Spannungen

$\cdot(-1)$

Gesucht:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_m \\ U_{m+1} \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \\ I_{m+1} \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}$$

mit

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,m} & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m} & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & -1 & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & -a_{1,m+1} & \cdots & -a_{1,n} \\ \vdots & 1 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{m,m+1} & \cdots & -a_{m,n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -a_{m+1,m+1} & \cdots & -a_{m+1,n} \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -a_{n,m+1} & \cdots & -a_{n,n} \end{array}\right)$$

=0

E

$E\cdot(-1)$

=0

und $\quad D = B^{-1} \cdot C$

Teil-Inversion: Algorithmus

Ausgangspunkt:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_m \\ I_{m+1} \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \\ U_{m+1} \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,m} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} \\ \hline a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right)$$

n = Anzahl der Knoten
m = Anzahl der bekannten Spannungen U

$U_1 \cdots U_m$ und $I_{m+1} \cdots I_n$ sowie $\boldsymbol{A}$ sind bekannt,

$I_1 \cdots I_m$ und $U_{m+1} \cdots U_n$ sind gesucht:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_m \\ U_{m+1} \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{D} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \\ I_{m+1} \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$c_{i,j} = \left| \begin{array}{ll} a_{i,j} & \text{für } i \le m \\ -1 & \text{für } i > m \text{ und } i = j \\ 0 & \text{für } i > m \text{ und } i \ne j \end{array} \right. \qquad b_{i,j} = \left| \begin{array}{ll} -a_{i,j} & \text{für } i > m \\ 1 & \text{für } i \le m \text{ und } i = j \\ 0 & \text{für } i \le m \text{ und } i \ne j \end{array} \right.$$

und $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{C}$

Technology Arts Sciences
TH Köln