

Grundlagen der Elektrotechnik



Komplexe Zahlen
für Wechselstrom

TH-Köln 2020

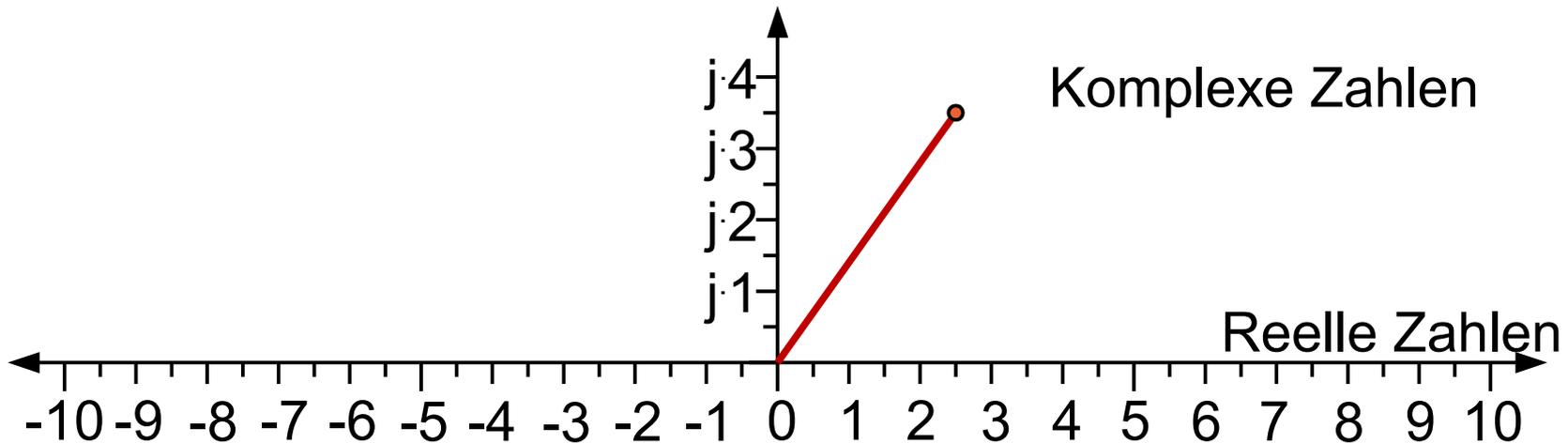
Prof. Dr. Eberhard Waffenschmidt

Komplexe Zahlen für Wechselstrom

- Definition komplexe Zahlen
- Zusammenhang mit Wechselstrom
- Zeigerdiagramm
- Effektivwert-Zeiger

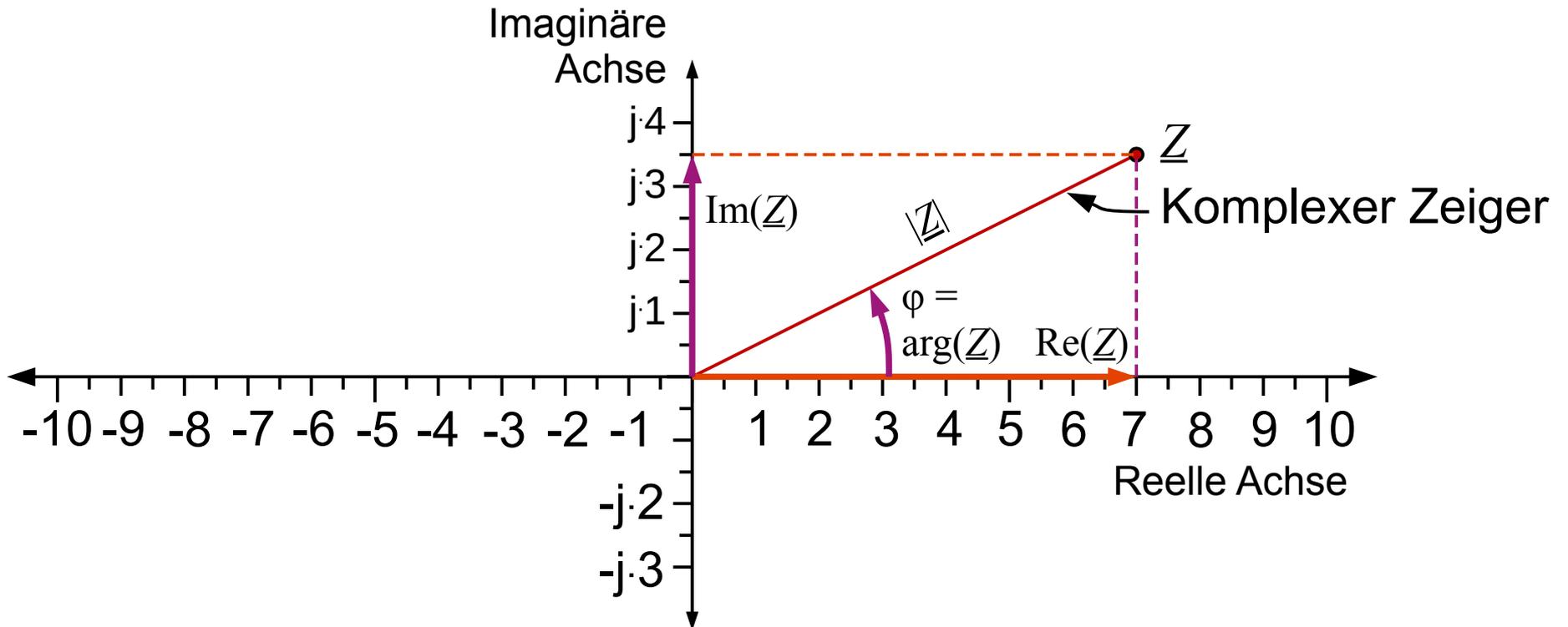
Mathematische Definition

■ Erweiterung des Zahlenraums



■ Imaginäre Zahl: $j = \sqrt{-1}$

Mathematische Definition



■ Komplexe Zahl besteht aus:
Realteil + Imaginärteil

$$\underline{Z} = \text{Re}(\underline{Z}) + j \cdot \text{Im}(\underline{Z})$$

■ oder äquivalent aus
Betrag und Phasenwinkel

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi}$$

Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik:

Einführung durch
Charles Proteus Steinmetz
in 1894

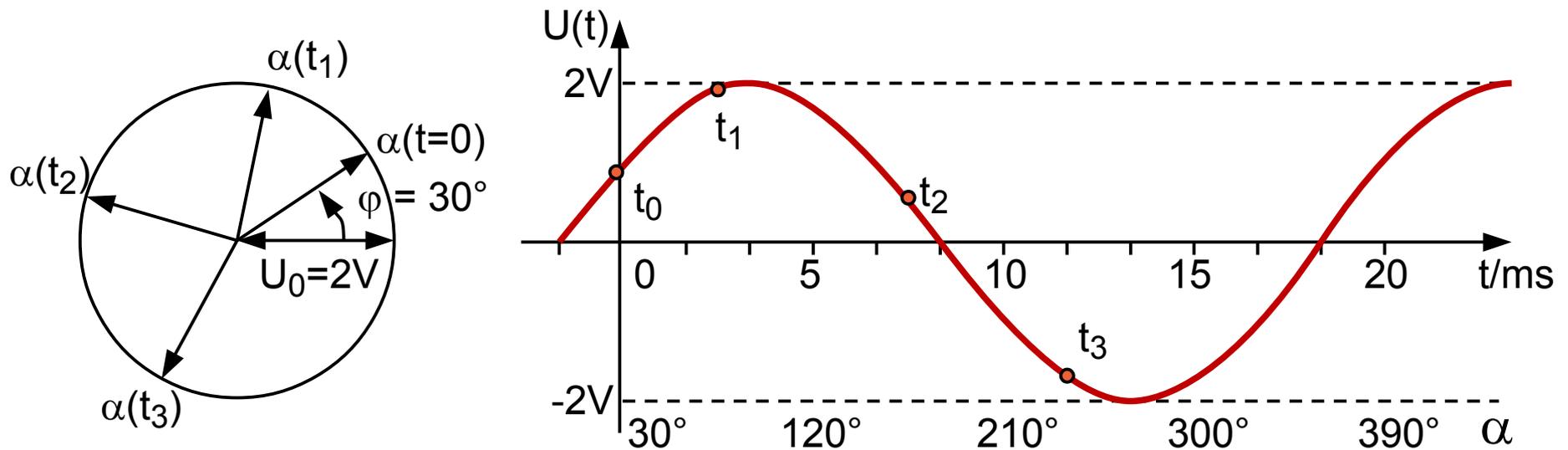
Charles Proteus Steinmetz,
"Complex Quantities and their Use in
Electrical Engineering",
International Electrical Congress - Chicago,
AIEE Proceedings,
1894, pp. 33-74

Frage:

Was haben komplexe Zahlen
mit Schwingungen
zu tun?

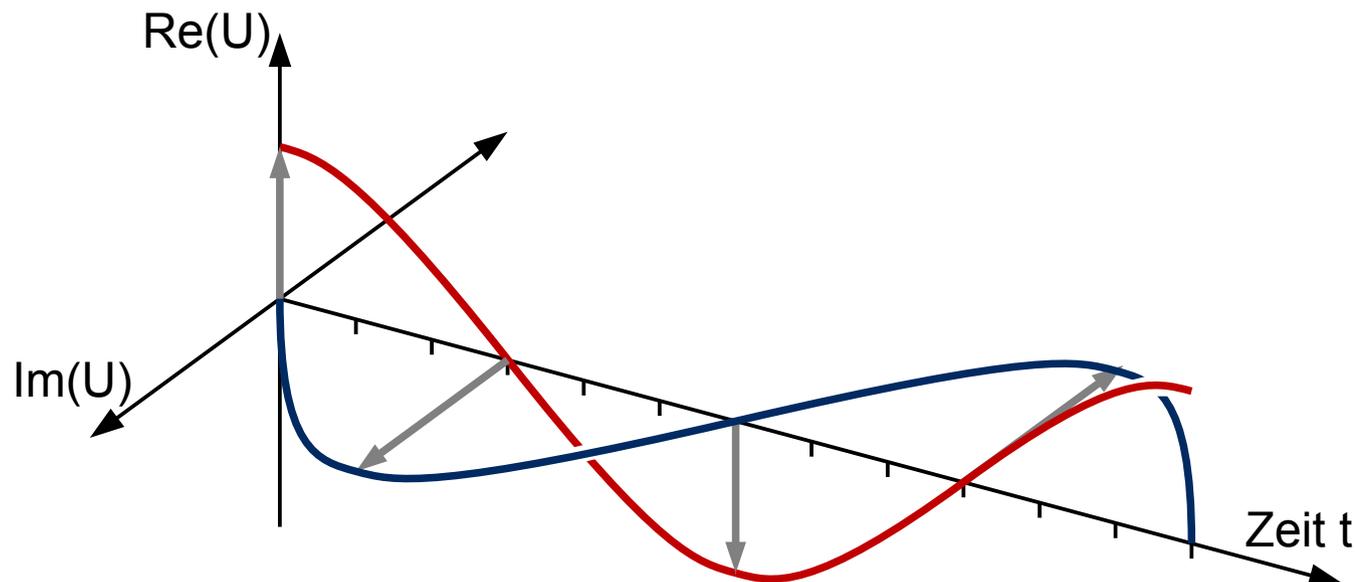
Komplexer Zeiger

- Sinusförmige Kurve lässt sich darstellen als „Schatten“ eines rotierenden Zeigers



Komplexer Zeiger

- Rotierender Zeiger als komplexe Zahl
 - Rotiert im komplexen Zahlenraum
 - Realteil = Cosinus-Kurve
= beobachtete Kurve
 - Imaginärteil = gedachte Kurve
= zum Rechnen

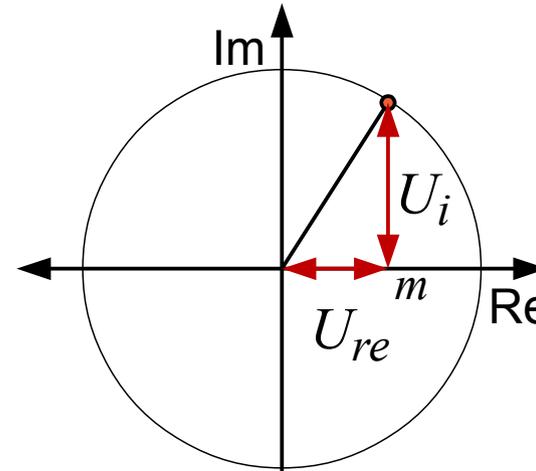


Mathematische Beschreibung

der Cosinus-Kurve mit komplexen Zeigern

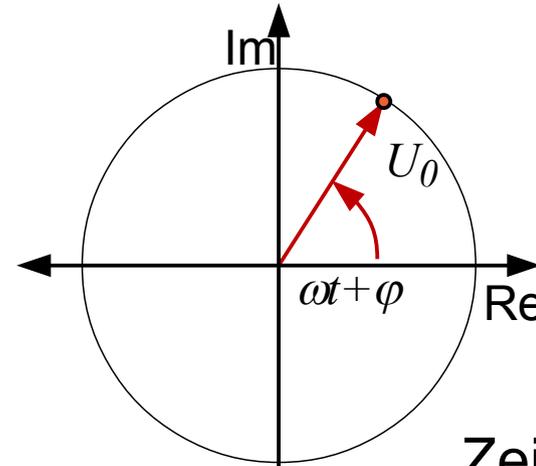
Beschreibung mit Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned}\underline{U}(t) &= U_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ &= \operatorname{Re}(\underline{U}(t)) + j \cdot \operatorname{Im}(\underline{U}(t)) \\ &= U_{\text{re}} + j \cdot U_{\text{im}}\end{aligned}$$



Beschreibung mit Betrag und Phase:

$$\underline{U}(t) = U_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$



Definition:

Betrag von \underline{U} : Länge des Zeigers

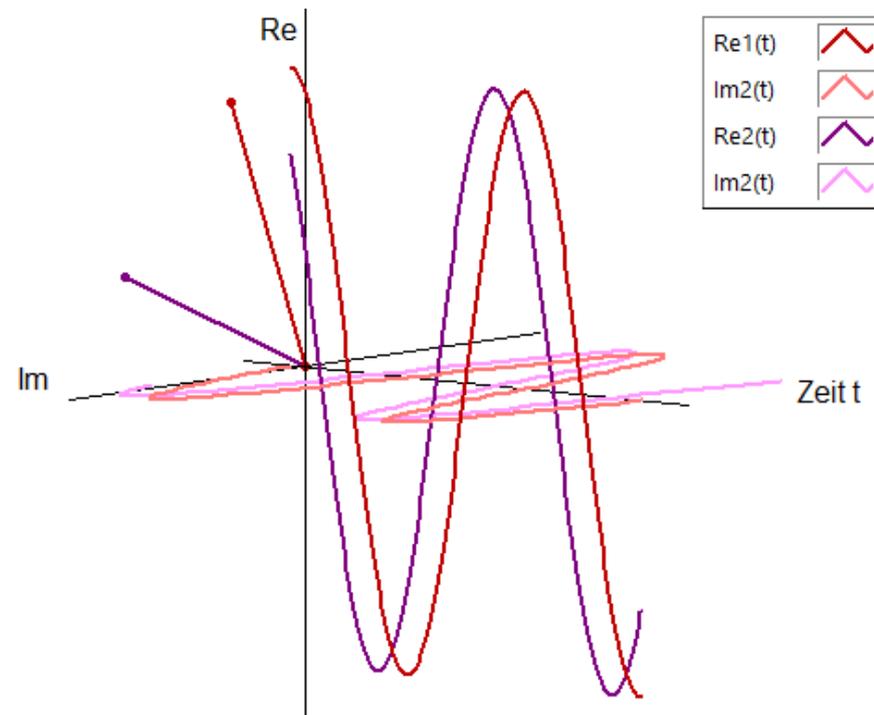
$$U_0 = |\underline{U}| = \sqrt{U_{\text{re}}^2 + U_{\text{im}}^2}$$

Zeiger dreht sich
mit der Zeit
gegen den
Uhrzeigersinn!

Komplexe Amplitude

Praktisch:

- In komplexer Zahl steckt Phasenbeziehung
- Phasenbeziehung zwischen zwei Signalen bleibt erhalten



- „Einfrieren“ zum Zeitpunkt t_0
- Weiterrechnen mit diesen Zeigern als „komplexe Amplitude“

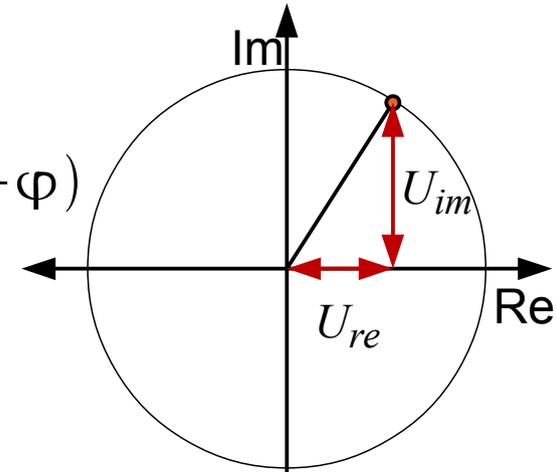
Mathematische Beschreibung

von komplexem Zeiger und Amplitude

Beschreibung mit Real- und Imaginärteil:

Zeitabhängig: $\underline{U}(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

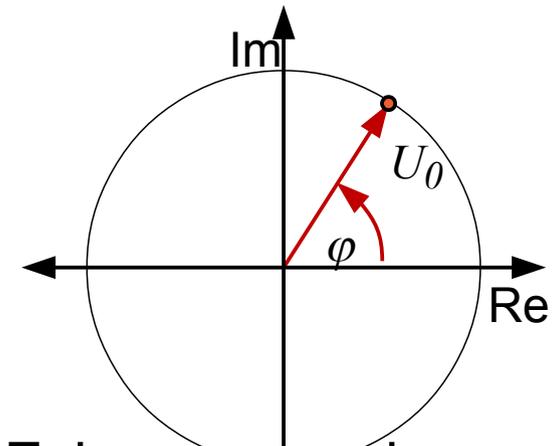
Komplexer Festzeiger: $\underline{U} = U_0 \cdot \cos(\varphi) + j \cdot U_0 \cdot \sin(\varphi)$
 $= U_{re} + j \cdot U_{im}$



Beschreibung mit Betrag und Phase:

Zeitabhängig: $\underline{U}(t) = U_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$

Komplexer Festzeiger: $\underline{U} = U_0 \cdot e^{j\varphi}$

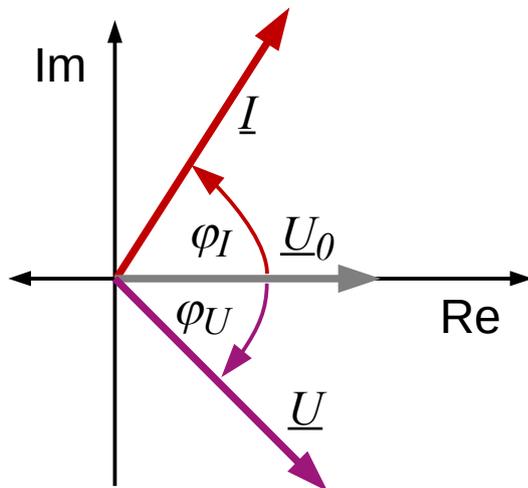
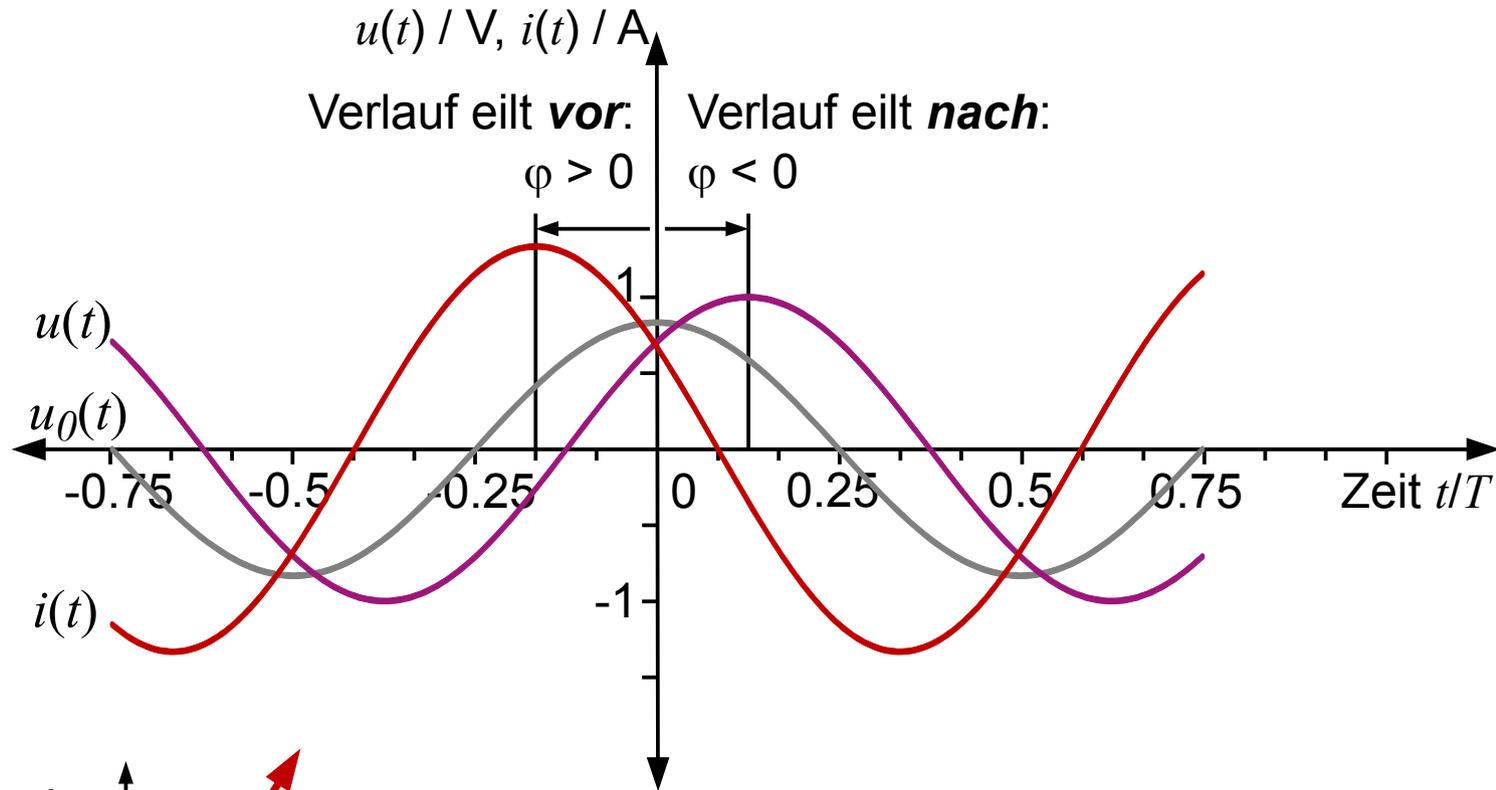


Effektivwert-Zeiger

Fast immer werden komplexe Festzeiger als Effektivwert-Zeiger angegeben:

$$\underline{U} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{U}_0}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi}$$

Beispiel: Cosinuskurve und Zeiger



Kurve nach *links* verschoben:
Positive Phasenverschiebung φ

Kontakt

Prof. Dr. Eberhard Waffenschmidt

Professur Elektrische Netze

Institut für Elektrische Energietechnik,
Fakultät für Informations-, Medien- und
Elektrotechnik (F07)

Technische Hochschule Köln

Betzdorferstraße 2, Raum ZO 9-19

50679 Köln, Deutschland

Tel. +49 221 8275 2020

eberhard.waffenschmidt@th-koeln.de

<https://www.th-koeln.de/>

[personen/eberhard.waffenschmidt/](https://www.th-koeln.de/personen/eberhard.waffenschmidt/)

